Θα μας απασχολήσουν 3 ερωτήματα:

1ο) Να βρεθεί η $P(X_n=j)$ για $j=0,1$, ή αλλιώς, $P\left(\text{η σ.δ. να βρίσκεται στην κατάσταση } j \text{ την χρ. στιγμή } n\right)$

(Θα συμβολίζω $P(X_n=j)=P_j^{(n)}$)

2ο) Να βρεθεί η πιθανότητα $P(X_n=j \mid X_0=i)$ για $i,j=1,2$

3ο) Εύρεση των πιθανοτήτων σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας, δηλαδή των πιθανοτήτων $\Pi_j = \lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} P_j^{(n)}$

Θέλω να βρω την πιθανότητα, μετά από μεγάλο χρον. διάστημα, η στοχαστική διαδικασία να βρίσκεται σε κατάσταση $j$

ισχύει πχ:

$P(X_{15}=1 \mid X_2=0) = P(X_{13}=1 \mid X_0=0)$

1ο) • $P(X_n=0) = P\left(\begin{array}{l}\text{η σ.δ. τη χρον. στιγμή } n-1 \text{ να ήταν} \\ \text{στην κατάσταση } 0 \text{ και } 0\to 0, \overset{\cup}{\text{ή}} \text{ η σ.δ.} \\ \text{τη χρ. στ. } n-1 \text{ να ήταν στην κατάστα-} \\ \text{ση } 1 \text{ και } 1\to 0\end{array}\right) =$

$= P\left(\begin{array}{l}\text{η σ.δ. τη χρ. στ. } n-1 \text{ να ήταν} \\ \text{στην κατάσταση } 0 \overset{\cap}{\text{ και }} 0\to 0\end{array}\right) + P\left(\begin{array}{l}\text{η σ.δ. τη χρ. στ. } n-1 \text{ να ήταν} \\ \text{στην κατάσταση } 1 \overset{\cap}{\text{ και }} 1\to 0\end{array}\right)$

$= P(X_{n-1}=0 \cap 0\to 0) + P(X_{n-1}=1 \cap 1\to 0) =$

$= P(X_{n-1}=0)\cdot P_{00} + P(X_{n-1}=1)\cdot P_{10}$

• Για $X_n=1$ $\quad P(X_n=1) = P(X_{n-1}=0)\cdot p_{01} + P(X_{n-1}=1)\cdot p_{11}$

Στοχος $\Longrightarrow$ Ενιαια γραφή των δυο σχέσεων

$$\underbrace{\begin{pmatrix} P(X_n=0) & P(X_n=1)\end{pmatrix}}_{p^{(n)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} P(X_{n-1}=0) & P(X_{n-1}=1)\end{pmatrix}}_{p^{(n-1)}} \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} p^{(n)} &= p^{(n-1)}\cdot P \\ &= p^{(n-2)}\cdot P\cdot P \\ &= p^{(n-3)}\cdot P\cdot P\cdot P \\ &\ \vdots \\ &= p^{(0)}\cdot P^n \end{aligned}$$

$$p^{(0)} = \begin{pmatrix} P(X_0=0) & P(X_0=1)\end{pmatrix}$$

Άρα, $\begin{pmatrix} p_0^{(n)} & p_1^{(n)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0^{(0)} & p_1^{(0)}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}^n$

$P = Q\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} Q^{-1}$, τοτε $P^n = Q\begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} Q^{-1}$

ΕΥΡΕΣΗ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΤΟΥ P

$$\begin{vmatrix} 1-a-\lambda & a \\ b & 1-b-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-a-\lambda)(1-b-\lambda) - ab = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda^2 + (a+b-2)\lambda + (1-a-b) = 0$, με $a+b \neq 2$

$\Delta = \dots = (a+b)^2 \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = 1-a-b$

# ΕΥΡΕΣΗ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

• $P\begin{pmatrix}q_{11}\\ q_{21}\end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix}q_{11}\\ q_{21}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_{11}\\ q_{21}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}q_{11}\\ q_{21}\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}(1-a)q_{11}+aq_{21}=q_{11}\\ b\,q_{11}+(1-b)q_{21}=q_{21}\end{cases} \Rightarrow q_{11}=q_{21}$ (Επιλέγω το $q_{11}=q_{21}=1$)

• $P\begin{pmatrix}q_{12}\\ q_{22}\end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix}q_{12}\\ q_{22}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_{12}\\ q_{22}\end{pmatrix} = (1-a-b) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}(1-a)q_{12}+aq_{22}=(1-a-b)q_{12}\\ bq_{12}+(1-b)q_{22}=(1-a-b)q_{12}\end{cases} \Rightarrow aq_{22}=-bq_{12}$ (Εγώ επιλέγω $q_{22}=-b$, $q_{12}=a$)

άρα $\Longrightarrow P^n = \begin{bmatrix}1 & a\\ 1 & -b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1^n & 0\\ 0 & (1-a-b)^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & a\\ 1 & -b\end{bmatrix}^{-1}$

Βρίσκω τον $Q^{-1} \Rightarrow Q^{-1} = \begin{bmatrix}1 & a\\ 1 & -b\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det Q^{-1}}\begin{bmatrix}-b & -a\\ -1 & 1\end{bmatrix} =$

αλλάζω πρόσημο

αλλάζω θέση

$= -\frac{1}{a+b}\begin{bmatrix}-b & -a\\ -1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b}\\ \frac{1}{a+b} & -\frac{1}{a+b}\end{bmatrix}$

άρα $\Longrightarrow P^n = \begin{bmatrix}1 & a\\ 1 & -b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1^n & 0\\ 0 & (1-a-b)^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b}\\ \frac{1}{a+b} & -\frac{1}{a+b}\end{bmatrix} = \cdots =$

$$= \begin{array}{c} x \\ \\ z \end{array}\begin{bmatrix}\frac{b+a(1-a-b)^n}{a+b} & \frac{a-a(1-a-b)^n}{a+b}\\ \\ \frac{b-b(1-a-b)^n}{a+b} & \frac{a+b(1-a-b)^n}{a+b}\end{bmatrix}\begin{array}{c} y \\ \\ w \end{array}$$

Πχ: $p_0^{(17)} = p_0^{(0)} x + p_1^{(0)} z$

2ο

$$\underbrace{P(X_n=0)}_{p_0^{(n)}} = P\left(\begin{array}{l}\text{αρχικά η ε.δ. να ήταν στο 0} \\ \text{και } \cap \ 0\to 0 \text{ σε n βήματα} \\ \qquad\qquad \text{ή } \cup \\ \text{αρχικά η ε.δ. να ήταν στο 1} \\ \text{και } \cap \ 1\to 0 \text{ σε n βήματα}\end{array}\right) = p_0^{(0)} p_{00}^{(n)} + p_1^{(0)} p_{10}^{(n)}$$

$$\underbrace{P(X_n=1)}_{p_1^{(n)}} = P\left(\begin{array}{l}\text{αρχικά η ε.δ. να ήταν στο 1} \\ \text{και } \cap \ 1\to 0 \text{ σε n βήματα} \\ \qquad\qquad \text{ή } \cup \\ \text{αρχικά η ε.δ. να ήταν στο 1} \\ \text{και } \cap \ 1\to 1 \text{ σε n βήματα}\end{array}\right) = p_1^{(0)} p_{10}^{(n)} + p_1^{(0)} p_{11}^{(n)}$$

Σκοπός $\Longrightarrow$ Ενιαία γραφή των δύο σχέσεων

$$\underbrace{\begin{pmatrix} p_0^{(n)} & p_1^{(n)} \end{pmatrix}}_{p^{(n)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} p_0^{(0)} & p_1^{(0)} \end{pmatrix}}_{p^{(0)}} \begin{pmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$p^{(n)} = p^{(0)} \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} \end{bmatrix} \longrightarrow \text{ΕΙΝΑΙ Ο } P^n$$

(από πρώτο ερώτημα)

$$\Rightarrow p_{00}^{(n)} = \frac{b + a(1-a-b)^n}{a+b} \qquad p_{01}^{(n)} = \frac{a - a(1-a-b)^n}{a+b}$$

$$p_{10}^{(n)} = \frac{b - b(1-a-b)^n}{a+b} \qquad p_{11}^{(n)} = \frac{a + b(1-a-b)^n}{a+b}$$

Αν ζητάει $p_{00}^{(17)}$, γράφω και τις δύο αποδείξεις

Αν ζητάει $p_0^{(17)}$, γράφω μόνο την πρώτη

## 3ª Πρόταση

Η ύπαρξη των οριακών πιθανοτήτων εξασφαλίζεται από το γεγονός ότι ο χώρος των καταστάσεων είναι πεπερασμένος (βλ. πρόταση επόμενου μαθήματος)

Υπάρχουν δύο τρόποι για να αποδείξουμε ότι υπάρχουν τα όρια

(i) ⟶ Στην απόδειξη του πρώτου ερωτήματος, αποδείξαμε ότι $p^{(n)} = p^{(n-1)} P$, δηλαδή $(p_0^{(n)} \;\; p_1^{(n)}) = (p_0^{(n-1)} \;\; p_1^{(n-1)}) \longrightarrow \lim_{n\to\infty} p^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \left[ p^{(n-1)} P \right] \Rightarrow$

$(\pi_0 \;\; \pi_1) = (\pi_0 \;\; \pi_1) P$

Άρα, $(\pi_0 \;\; \pi_1) = (\pi_0 \;\; \pi_1) \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \pi_0 = \pi_0 (1-a) + \pi_1 b \\ \pi_1 = \pi_0 a + \pi_1 (1-b) \end{cases} \Rightarrow a\pi_0 = b\pi_1$

Επίσης, πρέπει $\pi_1 + \pi_0 = 1$, άρα έχουμε το σύστημα $\left. \begin{array}{l} a\pi_0 = b\pi_1 \\ \pi_1 + \pi_0 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \pi_0 = \frac{b}{a+b} \\ \pi_1 = \frac{a}{a+b} \end{array}}$

(ii) ⟶ Θα χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα $P^n$

$$\pi_0 = \lim p_{00}^{(n)} = \lim p_{10}^{(n)} \Rightarrow \pi_0 = \lim \frac{b + a(1-a-b)^n}{a+b} = \lim \frac{b - b(1-a-b)^n}{a+b} = \frac{b}{a+b}$$

$$\pi_1 = \ldots = 1 - \frac{b}{a+b} = \frac{a}{a+b}$$

Ανάμεσα σ' αυτούς τους δύο τρόπους, είναι καλύτερα να επιλέξουμε τον πρώτο

## Άσκηση 323

| | | σήμερα | |
|---|---|---|---|
| | | στεγνή | βροχ |
| προηγ. μέρα | στεγνή | 1049 | 350 |
| | βροχ | 351 | 687 |

Έστω $X_n$ η σ.δ. που περιγράφει τον καιρό την n-οστή ημέρα. Πρόκειται για σ.δ. σε διακριτό χρόνο με διακριτό χώρο καταστάσεων

0= στεγνή

1= βροχερή

Από την εκφώνηση έχουμε ότι πρόκειται για ομογενή μ.α.

(i) $$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1049}{1049+350} & \frac{350}{1049+350} = a \\ \frac{351}{351+687} = b & \frac{687}{351+687} \end{bmatrix}$$

(ii) $p_{ij}^{(n)} = ;$ $\leftarrow$ απόδειξη $p^{(n)} = p^{(0)} P^n$ και απόδειξη $p^{(n)} = p^{(0)} \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} \end{bmatrix}$

(iii) Έστω T η τ.μ. που παριστάνει τον αριθμό των ημερών μέχρι να βρέξει για πρώτη φορά

$E(T) = ;$

Δυνατές τιμές της $E(T)$: 1, 2, 3, ... (διακριτή τ.μ.)

Όταν T διακριτή, τότε $E(T) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, P(T=k)$

$P(T=1) = p_{01}$

$P(T=2) = P(0 \to 0 \to 1) = p_{00}\, p_{01}$

$P(T=3) = P(0 \to 0 \to 0 \to 1) = p_{00} p_{00} p_{01} = p_{00}^2\, p_{01}$

$\vdots$

$P(T=k) = P(\underbrace{0 \to 0 \to 0}_{k \text{ φορές}} \dots \to 1) = p_{00}^{k-1} \cdot p_{01} = (1-a)^{k-1} \cdot a$

Άρα, $E(T) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-a)^{k-1} a = a \sum_{k=1}^{\infty} k(1-a)^{k-1} =$

$$= a\big(1-(1-a)\big)^{-2} = a \frac{1}{(1-(1-a))^2} = a \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)^{-1}$$

Με την παραγώγιση γίνεται:

$$\sum n x^{n-1} = (1-x)^{-2}$$